PFIEV

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHUYỂN GIAI ĐOẠN MÔN TOÁN NĂM 2023

Thời gian: 180 phút

Chú ý: Đề thi gồm 02 trang. Sinh viên không sử dụng tài liệu.

Câu 1 (2,0đ). Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1;0;0), e_2 = (0;1;0), e_3 = (0;0;1)\}$ và tự đồng cấu f xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + x_2 + 2x_3, 5x_1 + x_2 - 2x_3, -10x_1 + 2x_2 + 6x_3).$$

a) Biết $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (0;0;0)\}$, tìm các số thực m, n để $u = (m;n;2) \in \mathrm{Ker}(f)$.

b) Xác định $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ và ma trận của f đối với cơ sở E.

c) Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của f. Từ đó chỉ ra một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của f đối với cơ sở đó là ma trận chéo.

Câu 2 (1,5đ). Trong không gian Euclide $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ở đó

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$, cho các vectơ

$$v_1 = (1;-1;0;-1), v_2 = (2;-1;1;1), u = (7;3;-1;-1)$$

và không gian con $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ sinh bởi họ vectơ $\{v_1, v_2\}$.

a) Kiểm tra tính độc lập tuyến tính của $\{v_1, v_2\}$. Từ đó chỉ ra một cơ sở và số chiều của F.

b) Tìm một cơ sở trực chuẩn của F và xác định $p_F(u)$ với p_F là phép chiếu trực giao lên không gian con F.

c) Cho bốn vectơ u_1, u_2, u_3, u_4 thuộc $\mathbb{R}^4$ và ma trận vuông $A = [a_{ij}]$ với $a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$ $\forall 1 \le i, j \le 4$. Chứng minh rằng A chéo hóa được và $\det A \ge 0$.

Câu 3 (2,0đ). Cho các hàm số P, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$P(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 \text{ và } Q(x,y) = 3x^2y + y(e^y + 2x),$$

và các điểm $A(-1;0)$, $B(1;0)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

a) Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và các điểm dừng của P.

b) Tìm cực trị địa phương của P.

c) Viết phương trình đoạn thẳng AB và tính $I_1 = \int\limits_{\overline{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, ở đó $\overline{AB}$ là đoạn thẳng AB đi từ A đến B.

d) Tính $I_2 = \int\limits_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, với $(C) : y = \sqrt{1 - x^2}$ đi từ A đến B.

Câu 4 (2,0đ).

1. Cho phương trình vi phân (biến số x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực):

$$y'' + 4y' - 5y = (24x + 22)e^x \quad (*).$$

a) Giải phương trình đặc trưng và tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất liên kết với $(*)$:

$$y'' + 4y' - 5y = 0.$$

b) Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai $(*)$.

2. Cho chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\pi^n}$.

a) Chứng minh chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối bằng tiêu chuẩn D'Alembert.

b) Tính tổng của chuỗi số đã cho.

Câu 5 (2,5đ). Ba phòng R&D của ba công ty A, B và C cùng nghiên cứu và phát triển một công nghệ mới để tiết kiệm nhiên liệu của động cơ tăng áp. Biết rằng ba phòng làm việc độc lập và xác suất nghiên cứu thành công của 3 phòng A, B và C lần lượt là 0,7; 0,8 và 0,85.

a) Hãy tính xác suất để có đúng một phòng nghiên cứu thành công.

b) Hãy tính xác suất để có ít nhất một phòng nghiên cứu thành công.

c) Biết rằng có ít nhất một phòng nghiên cứu thành công. Hãy tính xác suất để có đúng hai phòng nghiên cứu thành công.

d) Hỏi trung bình có bao nhiêu phòng nghiên cứu thành công?

— HẾT —