Đề chính thức

ĐỀ THI CHUYỂN GIAI ĐOẠN MÔN TOÁN NĂM 2022

Thời gian làm bài: 180 phút. Sinh viên không sử dụng tài liệu.

Câu 1. (2 điểm)

1. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các véc tơ $a=(1,1,1); b=(1,2,0); c=(1,1,2)$ và tự đồng cấu f sao cho: $f(a)=-b-c; f(b)=b; f(c)=c.$

a. Chứng minh rằng họ $B=(a,b,c)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b. Có thể khẳng định $f^2=f$ không?

2. Cho $A\in M_2(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng, nếu $A^2=2023A-2022I_2$ và det(A)=2022, thì A đồng dạng với ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2021 & 2022 \end{bmatrix}$.

Câu 2. (1.5 điểm)

Cho $(E,<.>)$ là không gian Euclide 3 chiều; $B=(e_1,e_2,e_3)$ là một cơ sở trực chuẩn của E; g là tự đồng cấu của E có ma trận trong cơ sở B là $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Tìm các giá trị riêng và không gian con riêng của g.
2. Chứng minh rằng $\forall (x,y)\in E^2, <g(x),g(y)>=4<x,y>$.

Câu 3. (2 điểm)

Cho hàm hai biến $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x,y)=x^3-y^3+3xy$.

1. Tìm cực trị địa phương của f.
2. Tính tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, với $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2x; x^2+y^2\le 2y\}$.

Câu 4. (2 điểm)

1. Giải phương trình vi phân (biến số x, hàm chưa biết y lấy giá trị thực) $y''-5y'+6y=(2x+1)e^x$.
2. Cho chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ (1).

a. Chứng minh chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối.

b. Tính tổng của chuỗi đã cho.

Câu 5. (2.5 điểm)

Tại điểm đỗ xe buýt A có các xe buýt số 21 và 22 đi đến điểm đỗ B. Tại A, thời gian (đơn vị: phút) khách phải chờ hai tuyến xe nói trên là những đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai cùng bằng 1 và kỳ vọng bằng 6 với xe số 21, bằng 7 với xe số 22. (Hai đại lượng có phân phối $N(6;1)$ và $N(7;1)$).

Hỏi trung bình trong 100 lần đi từ A đến B (nếu hai xe đến cùng, thì chọn tùy ý , nếu không, thì chọn xe đến trước), có bao nhiêu lần khách chỉ phải chờ dưới 5 phút? Biết rằng các xe buýt hoạt động độc lập và thời gian chờ mỗi lần đi không phụ thuộc các lần khác.

Cho $\Phi(-1) = 0.1587; \Phi(-2) = 0.0228$, trong đó Φ là hàm phân phối của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn chuẩn hóa $N(0;1)$: $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

----------HẾT----------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.